



ФОНД  
НАУЧНИ  
ИЗСЛЕДВАНИЯ

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Списание за наука

„Ново знание“

ISSN 2367-4598 (Online)

Академично издателство „Талант“

Висше училище по агробизнес и развитие на  
регионите - Пловдив

New Knowledge

Journal of Science

ISSN 2367-4598 (Online)

Academic Publishing House „Talent“

University of Agribusiness and Rural Development -  
Bulgaria

<http://science.uard.bg>

## MATHEMATICAL MODEL FOR EVALUATION OF THE CONTENT OF HEAVY METALS IN SOIL BY INDIRECT PLANT SIGNATURES

**Pavlina Naskova**

*Technical University - Varna, Bulgaria*

**Abstract:** The level of ecological science is currently characterized by a high development of the experimental part, which leads to the presence of rich factual material and lesser development of the theoretical base, etc. mathematical ecology, which is limited to the use of a small number of lesser related theories. This determines the need to direct efforts in developing and approving of models for recognizing and forecasting environmental processes and phenomena. The paper presents a mathematical model for assessing the content of heavy metals in the soil by indirect signs of plants. Research on the effectiveness of the recognition procedures has been carried out, depending on the number of status classes and the volume of training data. It was found that in three of the classes of state, the nonlinear algorithm gives better recognition, and with increasing the volume of the learner sample the recognition efficiency increases.

**Keywords:** mathematical model, agroecosystem, soil, plant fractions, heavy metals, lead

## МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ ЗА ОЦЕНКА НА СЪДЪРЖАНИЕТО НА ТЕЖКИ МЕТАЛИ В ПОЧВАТА ПО КОСВЕНИ ПРИЗНАЦИ НА РАСТЕНИЯТА

**Павлина Наскова**

*Технически университет – Варна*

**Резюме:** Нивото на екологичната наука в момента се характеризира с високо развитие на експерименталната част, обуславяща наличието на богат фактически

материал и с по-слабо развитие на теоретичната база и т.н. математическа екология, която се свежда до използването на неголям брой слабо свързани помежду си теории. Това определя необходимостта за насочването на усилията към разработване и апробиране на модели за разпознаване и прогнозиране на екологични процеси и явления.

В статията е представен математически модел за оценка на съдържанието на тежки метали в почвата по косвени признаци на растенията. Проведени са изследвания на ефективността на разпознаващите процедури в зависимост от броя на класовете на състояние и на обема на данните за обучение. Установено е, че при три класа на състояние нелинейният алгоритъм дава по-добро разпознаване, а с увеличаване на обема на обучаващата извадка ефективността на разпознаване расте.

**Ключови думи:** математически модел, агроecosистема, почва, растителни фракции, тежки метали, олово.

## ВЪВЕДЕНИЕ

Почвата е ключов компонент на екосистемите. Тя осигурява хранителна среда за растенията и животните и играе основно значение за разграждането и трансфера на биомасата. Педосферата е комплексна хетерогенна система, която се състои от твърда фаза, съдържаща минерален и органичен компонент, почвен разтвор и почвен въздух. Способността на почвите да адсорбират метални йони от почвения разтвор е от ключово значение за земеделието и почвеното плодородие. Тогава, когато металите и металоидите присъстват във високи концентрации, могат да представляват значителна заплаха за всички живи организми (Sauer et al., 1989; Castro-Gonzales et al., 2008), създавайки дългосрочен здравен риск за екосистемата и хората (Ewers 1988; Ewers 1991; Adriano et al., 2005).

Замърсяването на почвите с тежки метали, предимно олово, кадмий и цинк, е в резултат на работата на автомобилния транспорт (Красницкий 2002; Ермохин 1998; Гаго 1964). В отработените газове има повече от 200 различни вещества, от които само пет са нетоксични (Ягодин и др. 1989). На този вид замърсяване са подложени в най-висока степен участъците покрай автомагистралите.

При тези условия важна роля има мониторингът на почвите, който би позволил да се следят промените, да се изучават закономерностите и да се моделират изследваните процеси, за да могат да бъдат взети навременни решения с цел предотвратяване на антропогенни бедствия и кризи. Това е свързано с провеждането на голям брой експерименти „на терен“, на специални скъпоструващи и времеемни лабораторни изследвания и с последваща обработка на данните.

Премахването или намаляването на броя на лабораторните анализи в реално време, може да стане за сметка на допълнителна математическа обработка на резултатите от измерването на някои косвени, достъпни за наблюдение и определяне признаци на състоянието на наблюдаваните растения. Добри възможности в това отношение дават методите за класификация, основаващи се на статистическата теория на разпознаване на образи (Недев и др. 1994; Недев 2012 а, б). В настоящата разработка е представен модел за оценка на съдържанието на тежки метали в почвата по косвени признаци на растенията.

## МАТЕРИАЛИ И МЕТОДИ

Вземането на почвените проби се извърши съгласно изискванията на агрохимическата и агротехническата практика и в съответствие с изискванията за опазване на природната среда.

За агроекосистема е избрана обработваема експериментална площ покрай участък от второкласен път II-29 Варна–Добрич до разклона за гр. Суворово. Пробите от агроекосистемата са взети на определени разстояния от банкета – в началото на агроекосистемата 0 m; 10 m; 20 m; 50 m.

Анализите са извършени по единна европейска методика за определяне на общо олово в почвите (ISO 11-047) – на атомно-адсорбционен спектрофотометър.

В табл.1 са представени част от получените стойности на съдържанието на олово в почвата на изследвания участък.

**Таблица 1.** Съдържание на олово (mg/kg/) в почвени проби по път II-29 Варна–Добрич

Дълбочина на пробовземане /cm/	Отстояние от банкета /m/			
	0 m	10 m	20 m	50 m
5-15	137,363	101,2	81,6	61,4
	136,999	103,4	83,2	60,78
	137,011	97,5	80,19	62,53
	137,555	99,82	79,52	61,34
	137,364	101,12	82,14	63,79
	136,998	100,98	83,15	58,68
	137,258	97,99	79,82	57,94
	137,361	98,56	78,26	61,88
30-40	83,5	72,8	62,4	50,6
	85,6	72,59	63,54	52,83
	81,02	69,98	61,81	50,21
	84,5	74,2	58,76	52,52
	82,32	68,78	64,2	49,65
	83,5	71,23	59,74	48,3
	84,32	73,39	62,92	52,4
	83,99	72,71	58,5	51,67

## СТАТИСТИЧЕСКО РАЗПОЗНАВАНЕ НА ОБРАЗИ - МАТЕМАТИЧЕСКИ ОСНОВИ

Основните парадигми в статистическото разпознаване на образи са много близки до реалната физическа същност на процесите, протичащи в биологичните, обществени, технически, екологични и други системи.

1. Решението за всяко конкретно действие се взема след разпознаване на състоянието, оценка на риска и прогнозиране на последиците от съответното действие.

2. Основната задача на статистическото разпознаване е причисляването на конкретния обект (ситуация, образ, сигнал, измерване) към един от класовете на предварително обособена група от състояния. В този смисъл това е задача за класификация т.е. за избор на най-подходящата оценка на т.н. класификатор. Класовете на състоянието при наличие на две алтернативи могат да бъдат „добро състояние–лошо състояние“. При три класа състоянията могат да отразяват последователно влошаващи се алтернативи и т.н. В решаваните от нас задачи ще разглеждаме задачата за разпознаване на обекти при две или три алтернативи; напр „добро–по- лошо–най-лошо състояние“.

Информацията за принадлежността на конкретен обект (състояние) към най-близкия до него клас от предварително въведената група от образи се съдържа в

определена съвкупност от числово кодирани признаци, организирани в  $m$ - мерен вектор на наблюдението. Данните се набират по метода на диагоналите. Направена е извадка на 0,25 ха култура от слънчоглед, в която има не по-малко от 3200 растения. Изследваната площ е разделена на квадрати със страна 1x1 m. На всички растения попадащи в квадратите на 5-15 m, 15-25 m, 45-55 m са класифицирани изследваните косвени признаци по посочената двоична система. Част от данните от направените наблюдения са представени в табл. 2.

3. В конкретно решаваната задача косвените признаци, записани с двоичен код, са:

№1 вджуджаване на растението;

№2 късо, тънко стъбло;

№3 малка листна маса;

№4 редуциран корен.

Състоянието на системата се определя по общия код, в който всеки признак участва с двоично кодирана стойност:

X=1 недобро състояние на признака не се наблюдава

X=2 недобро състояние на признака се наблюдава

**Таблица 2.** Данни от направените наблюдения

№ на наблюдението	Втори клас (от 0 до 25 m)				Първи клас (от 25 до 55 m)			
	вджуджаване на растението	късо и тънко стъбло	малка листна маса	редуциран корен	вджуджаване на растението	късо и тънко стъбло	малка листна маса	редуциран корен
1	2	2	1	2	1	1	1	2
2	2	2	2	2	2	1	1	2
3	2	2	2	1	1	1	1	1
4	1	2	1	2	1	2	1	1
5	2	2	1	2	1	1	1	1
6	2	2	2	2	1	1	2	2
7	1	1	2	1	1	1	1	1
8	1	2	2	2	1	1	1	2
9	1	1	2	2	1	2	1	1
10	2	2	1	1	1	1	1	2
11	1	2	2	1	1	1	1	2
12	2	2	1	2	1	1	1	1
13	1	1	2	2	1	2	1	2
14	2	2	2	2	1	1	1	1
15	2	1	1	2	1	1	1	1
16	1	1	2	2	2	1	2	1
17	1	2	2	2	2	1	2	1

4. Приемаме, че изменения в структурата и стойностите на вектора на наблюдение са възможни и могат да доведат до грешки в кода. В този смисъл следва да очакваме, че границите между класовете на състояние в пространството на признаците не са ясно очертани, което означава, че в това пространство образите са размити и се пресичат.

5. Методите за разпознаване на образи и класификация се основават на приемане на решения за отнасяне на разпознаваемия обект към най-близко разположения до него клас. Като мярка за близост може да се използва разстоянието в

евклидов или друг геометричен смисъл (степен на подобие между образите, вероятност за принадлежност на образа към съответния клас, стойността на риска при приетото класифициращо решение и др). Като се придържаме към статистическите методи за разпознаване и класификация, ние се ориентираме към последните две мерки за близост.

6. От основната парадигма на разпознаването следва, че за да може да се класифицират състоянията, разпознаващият субект (човек, компютър, правило, алгоритъм) трябва да бъде обучен за това. Това обучение се осъществява най-често по процедурата известна като „обучение с учител“, при която на обучаемия се представят образи или съвкупности от признаци, по които той осъществява съответното разпознаване. В този смисъл можем да говорим за един общ адаптивен подход, състоящ се от две части – обучение и разпознаване.

7. Статистическото разпознаване на образи дава възможност в процеса на адаптация да се използват различни видове и източници на информация – експертна, литературна, експериментална, получена от предходни изследвания и др.

При тези предпоставки, които са достатъчно общи и не налагат никакви ограничения върху която и да е конкретна задача, класификацията може да бъде решена за два случая:

–Класифициращото решение се взема в резултат на измерване и анализ на един вторичен признак (едномерен вектор на наблюдение).

–Най-доброто класифициращо решение се търси в резултат на анализ на измененията на съвкупност от признаци (многомерен вектор на наблюдение).

И в двата случая могат да бъдат получени процедури за класификация при два, три или повече класове на състоянието.

За косвена оценка на съдържанието на олово в почвата и провеждане на класификацията по този признак на участъците, разположени на различни разстояния от пътно платно е използвана една статистическа интерпретация на общата разпознаваща дискриминантна процедура, обхващаща всички възможни случаи (Duda. 1973; Недев 2012)

1. Разпознаване при голям брой на класовете на състояние, описващи се с косвени признаци с различни ковариационни матрици  $V_j \neq V_k (j, k = 1 \div m)$ . Нелинейни алгоритми.

Общото правило за приемане на решение, максимизиращо средната печалба е:

$$\begin{aligned} Y_i \in X_j, \text{ ако } g_j(Y_i) &= \frac{1}{2} (Y_i - \mu_j)^T V_j^{-1} (Y_i - \mu_j) - \frac{1}{2} \ln |V_j| + \ln P_j + \ln |C_j| \\ &= Y_i^T V_j^{-1} Y_i + (V_j^{-1} \mu_j)^T Y_i - \frac{1}{2} \mu_j^T V_j^{-1} \mu_j - \frac{1}{2} \ln |V_j| + \ln P_j + \ln |C_j| \\ &= Y_i^T A_j^{-1} Y_i + a_j^T Y_i + a_{j,0}' = \max \end{aligned}$$

където:

$$A_j = \frac{1}{2} V_j^{-1}; a_j = V_j^{-1} \mu_j$$

$a_{j,0}' = \frac{1}{2} \mu_j^T V_j^{-1} \mu_j - \frac{1}{2} \ln |V_j| + \ln P_j + \ln |C_j|$ , независещ от наблюдението  $Y_i$  свободен член в правилото за приемане на решения (прагова стойност, изразяваща стратегията за оптималност).

$Y_i$  – вектор, представен за разпознаване;

$V_i$  – ковариационна матрица на класа;

$\mu_i$  – вектор на математическите очаквания;

$p_i$  – априорна вероятност на класа;

$c_i$  – стойности на грешките на разпознаване.

В 3. (Недев, 2012 а ) са получени условия за оптимизация на разпознаването по стратегии, зависещи от пълнотата на информацията:

–Ако  $C_j$  са неизвестни или равни помежду си те не влияят върху правилото за приемане на решение ( $\ln|C_j| = 0$ ). В този случай алгоритъмът осигурява оптималност за приемане на решение в Байесов смисъл (максимум на апостериорната вероятност).

–Ако  $P_j$  са неизвестни или равни помежду си, те не влияят върху правилото за приемане на решение ( $\ln P_j = 0$ ). В този случай алгоритъмът осигурява оптималност в смисъла на критерия на минимакса.

–Ако  $C_j$  и  $P_j$  са неизвестни или равни за всички класове на състояние, те не влияят върху правилото за приемане на решения ( $\ln P_j = 0; \ln|C_j| = 0$ ). Алгоритъмът осигурява оптималност в смисъла на критерия на максимално правдоподобие.

2. Разпознаване при голям брой на класовете на състояние и еднакви ковариационни матрици на признаците  $V_j = V_k = V; (j, k = 1 \div m)$ . Линеини алгоритми.

Общото правило за приемане на решения, максимизиращо средната печалба, е:

$$Y_i \in X_j, \text{ ако } g_j(Y_i) = \frac{1}{2}(Y_i - \mu_j)^T V^{-1}(Y_i - \mu_j) - \frac{1}{2} \ln|V| + \ln P_j + \ln|C_j| = \max.$$

Поради еднаквостта на ковариационните матрици членовете в това уравнение  $Y_i^T \cdot V^{-1} Y_i$  и  $\ln|V|$  не са съществени за класификацията и правилото за разпознаване приема вида:

$Y_i \in X_j$ , ако

$$g_j(Y_i) = (V^{-1} \mu_j)^T Y_i - \frac{1}{2} \mu_j^T V^{-1} \mu_j + \ln P_j + \ln|C_j| = a_j^T Y_i + a_{j0}'' = \max,$$

където:

$$a_j = V^{-1} \mu_j$$

$a_{j0}'' = \frac{1}{2} \mu_j^T V^{-1} \mu_j + \ln P_j + \ln|C_j|$ , независещ от наблюдението  $Y_i$  свободен член (прагова стойност, отразяваща стратегията за оптималност).

- Ако  $C_j$  са неизвестни или равни помежду си ( $\ln|C_j| = 0$ ) алгоритъмът е оптимален в Байесов смисъл.

- Ако  $P_j$  са неизвестни или равни ( $\ln P_j = 0$ ) алгоритъмът е оптимален по критерия на минимакса.

- Ако  $P_j$  и  $C_j$  са неизвестни или равни за всички класове на състояние ( $\ln P_j = 0; \ln|C_j| = 0$ ), алгоритъмът е оптимален в смисъла на критерия на максимално правдоподобие.

3. Разпознаване на два класа на състояние и различни ковариационни матрици ( $V_j \neq V_k$ ). Нелинеен алгоритъм.

Правилото за приемане на решения, оптимални в смисъла на минимизация на средния риск, е:

$$Y_i \in X_1, \text{ ако } g_{1,2}(Y_i) = \frac{1}{2}(Y_i - \mu_1)^T V_1^{-1}(Y_i - \mu_1) + \frac{1}{2}(Y_i - \mu_2)^T V_2^{-1}(Y_i - \mu_2) - \frac{1}{2} \ln|V_1| - \frac{1}{2} \ln|V_2| + \ln P_1(C_{12} \ C_{11}) - \ln[P_2(C_{21} \ C_{22})] > 0$$

или

$Y_i \in X_1$ , ако

$$g_{1,2}(Y_i) = Y_i^T (A_1 \quad A_2) Y_i + (a'_1 \quad a'_2)^T Y_i + (A'_{1,0} \quad A'_{2,0}) > \ln \frac{P_2(C_{21} \quad C_{22})}{P_1(C_{12} \quad C_{11})} = \lambda_0$$

$Y_i \in X_2$ , ако  $g_{1,2}(Y_i) < \lambda_0$ ,

където при  $j = 1, 2$ .

$$A_j = \frac{1}{2} V_j^{-1}; a'_j = V_j^{-1} \mu_j; A'_{j,0} = \frac{1}{2} \mu_j^T V_j^{-1} \mu_j - \frac{1}{2} \ln |V_j|$$

• Ако  $(C_{21} \quad C_{22}) = (C_{12} \quad C_{11})$ , т.е.  $\lambda_0 = \ln P_2/P_1$  – алгоритъмът е оптимален в Байесов смисъл.

• Ако  $P_1 = P_2$ , т.е.  $\lambda_0 = \ln C_{21} \quad C_{22}/C_{12} \quad C_{11}$  – алгоритъмът е оптимален в смисъла на критерия на минимакса.

• Ако  $P_1 = P_2$  и  $(C_{12} \quad C_{11}) = (C_{21} \quad C_{22})$ , т.е.  $\lambda_0 = 0$  – алгоритъмът е оптимален в смисъла на критерия на максимално правдоподобие.

4. Разпознаване при два класа на състояние и еднакви ковариационни матрици ( $V_j = V_{k=V}$ ). Линеен алгоритъм.

Правилото за приемане на решения, оптимални в смисъла на минимизация на средния риск, е:

$Y_i \in X_1$ , ако

$$g_{1,2}(Y_i) = \frac{1}{2} (Y_i \quad \mu_1)^T V^{-1} (Y_i \quad \mu_1) + \frac{1}{2} (Y_i \quad \mu_1)^T V^{-1} (Y_i \quad \mu_2) - \frac{1}{2} \ln |V| + \frac{1}{2} \ln |V| + \ln [P_1(C_{12} \quad C_{11})] - \ln [P_2(C_{21} \quad C_{22})] > 0$$

След развиване на квадратичните форми членовете от типа  $Y_i V^{-1} Y_i$  и  $\ln |V|$  се наблюдават двукратно с обратни знаци и след тяхното отпадане линейният алгоритъм приема вида:

$Y_i \in X_1$ , ако

$$g_{1,2}(Y_i) = Y_i^T V^{-1} (\mu_1 \quad \mu_2) - \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2)^T V^{-1} (\mu_1 \quad \mu_2) > \ln \frac{P_2(C_{21} \quad C_{22})}{P_1(C_{12} \quad C_{11})} = \ln \lambda_0$$

$Y_i \in X_2$ , ако  $g_{1,2}(Y_i) < \ln \lambda_0 \dots$ )

или

$Y_i \in X_1$ , ако

$$g_{1,2}(Y_i) = (a''_1 \quad a''_2)^T Y_i + (A''_{1,0} \quad A''_{2,0}) > \ln \frac{P_2(C_{21} \quad C_{22})}{P_1(C_{12} \quad C_{11})} = \lambda_0$$

$Y_i \in X_2$ , ако  $g_{1,2}(Y_i) < \ln \lambda_0$ ,

където при  $j = 1, 2$

$$a''_j = V^{-1} \mu_j; A''_j = \frac{1}{2} \mu_j V^{-1} \mu_j - \text{независещ от наблюдението } Y_i \text{ свободен член}$$

• Ако  $(C_{21} \quad C_{22}) = (C_{12} \quad C_{11})$ , т.е.  $\lambda_0 = \ln P_2/P_1$  – алгоритъмът е оптимален в Байесов смисъл.

• Ако  $P_1 = P_2$ , т.е.  $\lambda_0 = \ln(C_{21} \quad C_{22})/(C_{12} \quad C_{11})$  – алгоритъмът е оптимален в смисъла на критерия на минимакса.

• Ако  $P_1 = P_2$  и  $(C_{21} \quad C_{22}) = (C_{12} \quad C_{11})$ , т.е.  $\lambda_0 = \ln 1 = 0$  – алгоритъмът е оптимален в смисъла на критерия на максимално правдоподобие.

## РЕЗУЛТАТИ

Проведени са изследвания на ефективността на разпознаващите процедури в зависимост от броя на класовете на състояние и на обема на данни за обучение.

### А. Влияние на броя на класовете на състояние

А.1. Обучение при два класа на състояние, условно наречени добър (с по-малко съдържание на олово в почвата) и лош (с високо съдържание на олово в почвата). Разпознаване на конкретни данни, неучаствали в процеса на обучението.

А.2. Разпознаване на контролни данни при три класа на състояние по нелинейни и линейни алгоритми (добър, междинен, лош). Резултатите от разпознаващата процедура са представени в табл. 3 и 4. Задачата е решена с използването на линеен и нелинеен разпознаващ алгоритъм (условие 1; условие 2), като за обучение са използвани по 20 наблюдения, а за разпознаване по 18 неизвестни вектора. Оценката на съдържанието на олово по косвени признаци се определя окончателно по средната вероятност за вярно разпознаване ( $P$ ) или по средната грешка на разпознаване ( $\gamma$ ).

**Таблица 3.** Нелинеен алгоритъм за разпознаване

		Разпознаване		
		I клас	II клас	III клас
Действителн o	I клас	$P_{11}=0,75$	$\alpha_{21}=0,1875$	$\alpha_{31}=0$
	II клас	$\alpha_{12}=0,25$	$P_{22}=0,4375$	$\alpha_{32}=0,0625$
	III клас	$\alpha_{13}=0$	$\alpha_{23}=0,375$	$P_{33}=0,9375$

$$P = \frac{1}{3}(0,75 + 0,4375 + 0,9375) = \frac{1}{3} \cdot 2,125 = 0,708$$

$$\gamma = 0,292$$

**Таблица 4.** Линеен алгоритъм за разпознаване

		Разпознаване		
		I клас	II клас	III клас
Действителн o	I клас	$P_{11}=0,9375$	$\alpha_{21}=0,3125$	$\alpha_{31}=0,125$
	II клас	$\alpha_{12}=0,0625$	$P_{22}=0,3125$	$\alpha_{32}=0,1875$
	III клас	$\alpha_{13}=0$	$\alpha_{23}=0,375$	$P_{33}=0,6875$

$$P = \frac{1}{3}(0,9375 + 0,3125 + 0,6875) = \frac{1}{3} \cdot 1,9375 = 0,646$$

$$\gamma = 0,354$$

В. Влияние на обема на обучаващите наблюдения върху ефективността на разпознаване.

Задачата е решена за два класа на състояние. Линейният двукласен алгоритъм, получен от условие 4 на уравнение (1) се обучава последователно на базата на: 14, 20, 40, 60 обучаващи данни, като във всички случаи за разпознаване са представени по 18 контролни вектора на наблюдение, неучаствали в обучението.

а) общо 14 обучаващи данни (по 7 от всеки клас) (табл. 5)

**Таблица 5**

		Разпознато		Общо
		І клас	ІІ клас	
Действително	І клас	$P_{11}=0,902$	$\alpha_{21}=0,098$	1,0
	ІІ клас	$\alpha_{12}=0,317$	$P_{22}=0,683$	1,0

$$P = \frac{1}{2}(0,902 + 0,683) = \frac{1,585}{2} = 0,792$$

$$\gamma = 0,2075$$

б) общо 20 обучаващи данни (по 10 от всеки клас) (табл. 6)

**Таблица 6**

		Разпознато		Общо
		І клас	ІІ клас	
Действително	І клас	$P_{11}=0,868$	$\alpha_{21}=0,132$	1,0
	ІІ клас	$\alpha_{12}=0,105$	$P_{22}=0,895$	1,0

$$P = \frac{1}{2}(0,868 + 0,895) = \frac{1,763}{2} = 0,882$$

$$\gamma = 0,118$$

в) общо 40 обучаващи данни (по 20 от всеки клас) (табл. 7)

**Таблица 7**

		Разпознато		Общо
		І клас	ІІ клас	
Действително	І клас	$P_{11}=0,964$	$\alpha_{21}=0,036$	1,0
	ІІ клас	$\alpha_{12}=0,107$	$P_{22}=0,893$	1,0

$$P = \frac{1}{2}(0,964 + 0,893) = \frac{1,875}{2} = 0,928$$

$$\gamma = 0,072$$

г) общо 60 обучаващи данни (по 30 от всеки клас) (табл. 8)

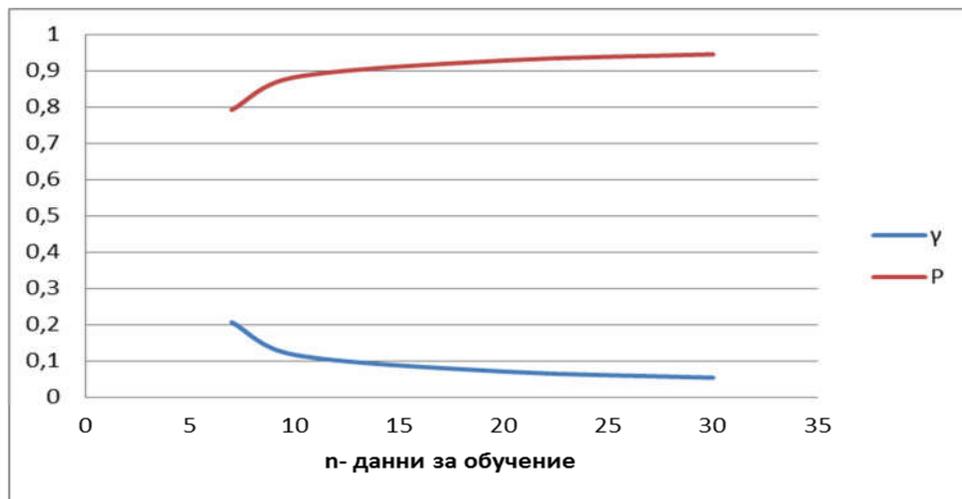
**Таблица 8**

		Разпознато		Общо
		I клас	II клас	
Действително	I клас	$P_{11}=1$	$\alpha_{21}=0$	1,0
	II клас	$\alpha_{12}=0,111$	$P_{22}=0,889$	1,0

$$P = \frac{1}{2}(1 + 0,889) = \frac{1,889}{2} = 0,945$$

$$\gamma = 0,055$$

На фиг. 1 е представен процесът на изменение на вероятността за вярно ( $P$ ) и грешно ( $\gamma$ ) разпознаване в зависимост от обема на обучаващите извадки при два класа на състояние.



**Фиг. 1.** Изменение на вероятността за вярно ( $P$ ) и грешно ( $\gamma$ ) разпознаване

### ИЗВОДИ

1. При три класа на състояние нелинейният алгоритъм дава по-добро разпознаване  $P = 0,708$  в сравнение с линейната процедура  $P = 0,646$ .

2. Използването на малък брой обучаващи данни при двукласната задача ( $n_1=n_2=7$ , което е близо до минималния брой за математическо решаване на задачата) дава практически използваем, макар и не много добър резултат от разпознаването  $P = 0,792$

3. С увеличаване на обема на обучаващата извадка ефективността на разпознаване расте, за да достигне до вероятност  $P = 0,945$ , което е в границата на възможно достижимата максимална стойност.

4. При добро обучение процедурата на косвена оценка и класификация на почвите по съдържание на олово в тях при два класа на състояние дава по-добри резултати, отколкото при три класа на състояние. В този случай най-много грешки се допускат при класификацията на състоянията на т.н. „междинен клас“.

5. За надеждното изследване на един участък от 10 дка е достатъчно оценяването на не повече от 100 растения с особени морфологични характеристики.

6. Самото изследване е лесно реализуемо и не изисква време отнемащи и скъпи лабораторни изследвания.

### **ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА**

1. Ермохин, Р., Гужулев, Е. Сницарь, 1998. Познай свой дом и помоги природе и себе, Омск: ГУИПП Омский дом печат, 264 с.
2. Красницкий, М., 2002. Агрехимическая и экологическая характеристики почв Западной Сибири. Монография. ОмГАУ.- Омск, 144 с.
3. Недев Ас., 2012а. Разпознаване на образи и оптимално стохастическо управление, книга I, Варна: ИК „Геа Принт“, 345 с.
4. Недев Ас., 2012б. Разпознаване на образи и оптимално стохастическо управление, книга II, Варна: ИК „Геа Принт“, 367 с.
5. Недев, Ас., К. Тенекеджиев. Техническа диагностика и разпознаване на образи, Варна: ТУ, 1994, 480 с.
6. Ягодин Б.А., Б. Виниградова, В. Говорина, 1989. Кадмий в системе почва–удобрение–растения–животные организмы и человек. Агрехимия.-№5.- С. 118-130.
7. Adriano, C., N. Bolan, J. Vangronsveld, W. Wenzel. 2005. Heavy metals. — In: Hillel, D. (Ed.). Encyclopedia of Soils in the Environment. Amsterdam, Elsevier, 175—182.
8. Castro-Gonzales, I., M. Mendez Armenta. 2008. Heavy metals: Implications associated to fish consumption. Environmental Toxicology and Pharmacology 26: 263-271.
9. Duda R.O., E. Hart. 1973. Pattern classification and scene analysis” D.Wiley.New York. p.510;
10. Ewers, U. 1988. WHO-Guidelines for Air Quality in Europe. — Off. Gedundheitswes, 50, 626—629.
11. Ewers, U. 1991. Standards, guidelines and legislative regulations concerning metals and their compounds. — In: Merian, E. (Ed.). Metals and their Compounds in the Environment. New York, VCH, Weinheim, 687—711.
12. Garo J.H. 1964. Gharacterization of Superphospat in Superphospat: its History, Chemistry and Manufacture. U.S. Dept. Agn. And TV A -Washington, D.S.: P.102-173.
13. Sauer, G. R., N. Watabe. 1989. Temporal and metal-specific patterns in the accumulation of heavy metals by the scales of Fundulus heteroclitus. Aquatic toxicology 14: 233-248.

### **References**

1. Ermohin, P., Guzhulev, E. Snitsary, 1998. Poznay svoy dom i pomogi prirode i sebe, Omsk: GUIPP Omskiy dom pechat, 264 s.
2. Krasnitskiy, M., 2002. Agrohimicheskaya i ekologicheskaya harakteristiki pochv Zapadnoy Sibiri. Monografiya. OmGAU.- Omsk, 144 s.
3. Nedev As., 2012a. Razpoznavane na obrazi i optimalno stohastichesko upravlenie, kniga I, Varna: IK „Gea Print“, 345 s.
4. Nedev As., 2012b. Razpoznavane na obrazi i optimalno stohastichesko upravlenie, kniga II, Varna: IK „Gea Print“, 367 s.
5. Nedev, As., K. Tenekedzhiev. Tehnicheska diagnostika i razpoznavane na obrazi, Varna: TU, 1994, 480 s.
6. Yagodin B.A., B. Vinigradova, V. Govorina, 1989. Kadmiy v sisteme pochva–udobrenie–rasteniya–zhivotnaye organizmay i chelovek. Agrohimiya.-№5.- S. 118-130.
7. Adriano, C., N. Bolan, J. Vangronsveld, W. Wenzel. 2005. Heavy metals. — In: Hillel, D. (Ed.). Encyclopedia of Soils in the Environment. Amsterdam, Elsevier, 175—182.

8. Castro-Gonzales, I., M. Mendez Armenta. 2008. Heavy metals: Implications associated to fish consumption. *Environmental Toxicology and Pharmacology* 26: 263-271.
9. Duda R.O., E. Hart. 1973. *Pattern classification and scene analysis*” D.Wiley.New York. r.510;
10. Ewers, U. 1988. WHO-Guidelines for Air Quality in Europe. — *Off. Gedundheitswes*, 50, 626—629.
11. Ewers, U. 1991. Standards, guidelines and legislative regulations concerning metals and their compounds. — In: Merian, E. (Ed.). *Metals and their Compounds in the Environment*. New York, VCH, Weinheim, 687—711.
12. Garo J.H. 1964. Gharacterization of Superphospat in Superphospat: its History, Chemistry and Manufacture. U.S. Dept. Agn. And TV A -Washington, D.S.: P.102-173.
13. Sauer, G. R., N. Watabe. 1989. Temporal and metal-specific patterns in the accumulation of heavy metals by the scales of *Fundulus heteroclitus*. *Aquatic toxicology* 14: 233-248.